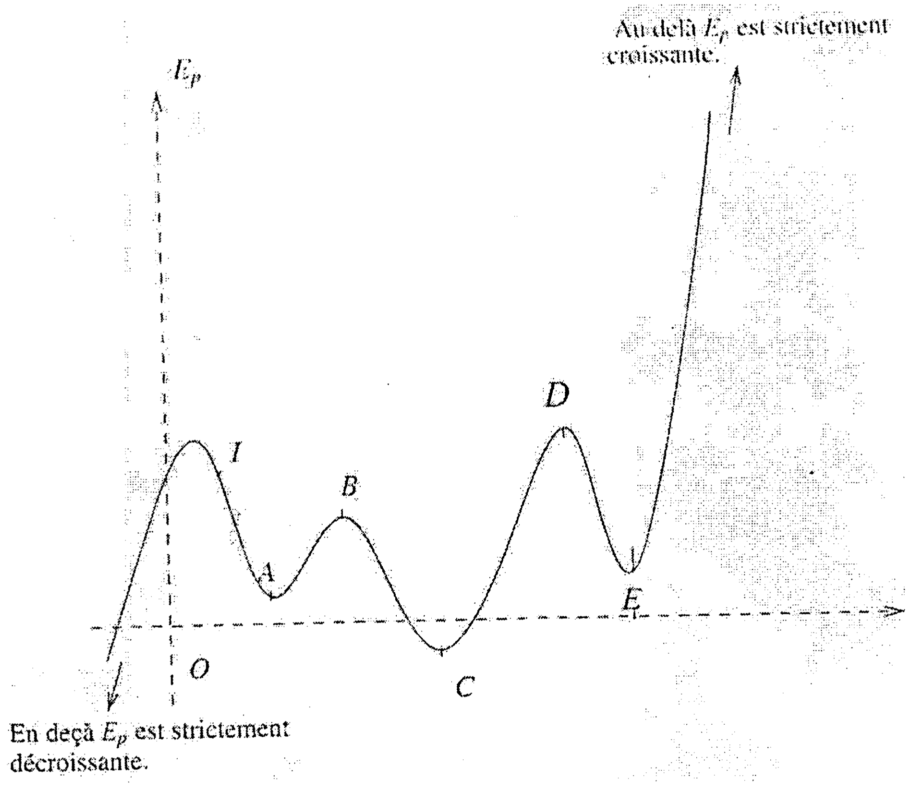
Université François Rabelais
Département de Physique

Année 2008/2009
L2 SM

Examen session 2 – Mécanique
Samedi 13 juin — Durée 2h

Exercice 1

Un point matriel P de masse m se déplace sur l'axe Ox et son énergie potentielle $E_p(x)$ est donnée par la fonction représentée sur la figure . On néglige tout type de force autre que celle dérivant de $E_p(x)$. À l'instant initial, le point P se trouve en $x(I)$ avec la vitesse v_0; son énergie cinétique est alors $\frac{1}{2}m\,v_0^2 = E_m - E_p(I)$ où E_m est l'énergie mécanique.



Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si P se dirige vers $x(A)$ alors son énergie mécanique diminue.

b) Il y a 6 positions d'équilibre dont 3 stables.

c) I est une position d'équilibre (éventuellement instable) si l'on choisit $v_0 = 0$.

d) P atteint $x(A)$ même si $v_0 < 0$.

e) Si $E_m < E_p(D)$, alors P n'atteint pas $x(E)$.

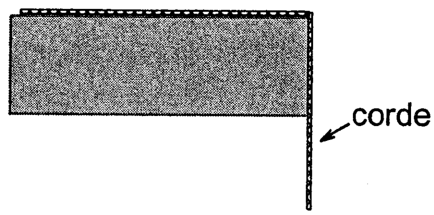
f) Pour que P atteigne $x(E)$ il faut et il suffit que $E_m > E_p(D)$.

g) Si P atteint $x(A)$ alors P atteint $x(C)$.

h) Quel que soit E_m, P n'atteint jamais les régions telles que $E_p < 0$.

Exercice 2

Une corde inextensible de masse M et de longueur totale L est posée sur une table de façon qu'à un instant t donné, une longueur $l(t)$ de cette corde pende (voir figure). On suppose qu'il n'y a aucun frottement entre la corde et la table.
La corde étant initialement au repos avec une longueur l_0 qui pend, on se propose de calculer le temps τ nécessaire pour qu'elle tombe de la table.



a) À partir du théorème du centre d'inertie, établir que la relation entre l'accélération a de la corde et $l(t)$ s'écrit:

$$a = \frac{l(t)}{L} g$$

où $g > 0$ est l'accélération de la pesanteur.

b) L'accélération de la corde est-elle constante au cours de son mouvement ? Donner sa valeur à $t = 0$ et à $t = \tau$.

c) Déduire que la vitesse instantanée de la corde est donnée par l'équation différentielle :

$$\ddot{v} - \frac{g}{L} v = 0$$

où $\ddot{v}$ représente la dérivé seconde de $v(t)$ par rapport t.

d) Résoudre l'équation différentielle précédente en tenant compte des conditions initiales $v(0)$ et $a(0)$.

e) Déduire l'expression de $a(t)$ en fonction des paramètres g, l_0 et L.

f) Montrer que τ est donné par:

$$\sqrt{\frac{L}{g}}\, Ln(\frac{L+\sqrt{L^2-l_0^2}}{l_0})$$

où Ln représente le logarithme népérien.

Exercice 3

On considère une particule ponctuelle M de masse m se déplaç ant dans le plan xOy. Son énergie potentielle est donnée par:

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\,m\omega_1^2\,x^2 + \frac{1}{2}\,m\omega_2^2\,y^2$$

où ω_1 et ω_2 sont deux paramètres réels positifs. On néglige tout type de force autre que celle dérivant de $U(x,y)$. À l'instant initial $t = 0$, la position et la vitesse de la particule sont respectivement données par les vecteurs $\vec{r}(0) = x_0\,\vec{i}$ et $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{j}$ où x_0 et v_0 sont des réels positifs.

1. Déterminer la force $\vec{F}$ agissant sur M.
2. Établir les équations décrivant le mouvement de M.
3. Vérifier que la position de la particule est donnée par:

$$\vec{r}(t) = x_0 \cos(\omega_1 t)\;\vec{i} + \frac{v_0}{\omega_2}\,\sin(\omega_2 t)\;\vec{j}$$

4. On considère le cas où $\omega_1 = \omega_2$. Quelle est la trajectoire de M ? Représenter cette trajectoire dans le plan xOy.